4. BASİT RASTGELE ÖRNEKLEME

4.1. Kitle Ortalamasının Tahmini

BRÖ'de kitle ortalaması $\bar{Y}$ ile gösterilir.

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i}{N}, \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$

TEOREM 1:

N genişliğindeki bir kitleden, n genişliğinde bir örneklem BRÖ ile seçildiğinde ortalama tahmin edicisi ($\bar{y}$), $\bar{Y}$'nin yansız bir tahminidir.

İSPAT:

N genişliğinde bir kitleden $\binom{N}{n}$ adet örneklem oluşturmak mümkündür. Her bir örneklemden yapılabilecek ortalama tahmini $\bar{y}_i$ ile gösterilir. $\bar{y}$ tahmin edicisi bir tesadüfi değişkendir. Örnek uzayının her bir noktasında belirli değerleri belirli olasılıklarla alır. Bu tesadüfi değişkenin değeri

$$E(\bar{y}) = \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{i=1}^{\binom{N}{n}} \bar{y}_i \qquad 1)$$

$$= \frac{1}{\binom{N}{n}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\binom{N}{n}} (y_1 + y_2 + \cdots + y_n)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{\binom{N}{n}} (y_1 + y_2 + \cdots + y_n)}{\binom{N-1}{n-1}} = y_1 + y_2 + \cdots + y_N \qquad 2)$$

$$E(\bar{y}) = \frac{1}{\binom{N}{n}} \frac{1}{n} \binom{N-1}{n-1} (y_1 + y_2 + \cdots + y_N)$$

$$E(\bar{y}) = \frac{\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} \frac{1}{n} (y_1 + y_2 + \cdots + y_N)$$

$$\frac{\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} = \frac{\frac{(N-1)!}{(N-n)!\,(n-1)!}}{\frac{N!}{(N-n)!\,n!}} = \frac{n}{N}$$

$$E(\bar{y}) = \frac{n}{N} \frac{1}{n} (y_1 + y_2 + \cdots + y_N)$$

$$E(\bar{y}) = \frac{(y_1 + y_2 + \cdots + y_N)}{N}$$

$$E(\bar{y}) = \bar{Y}$$

Dolayısıyla bu tahmin edici yansız bir tahmin edicidir.

Sonuç: Örneklem toplamının beklenen değeri kitle toplamının $\frac{n}{N}$ katı kadardır.

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = \frac{n}{N}\frac{\sum_{i=1}^{N} y_i}{N}$$

$$E\left(n\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}\right) = E(n\bar{y})$$

$$= nE(\bar{y})$$

$$= n\bar{Y}$$

$$= \frac{n}{N}\frac{\sum_{i=1}^{N} y_i}{N}$$

4.2. Kitle Toplamının Tahmini

BRÖ'de kitle toplamı Y, örneklem tahmini $\hat{Y}$ ile gösterilir.

$$Y = N\bar{Y}$$

$$\hat{Y} = N\bar{y}$$

$$E(\hat{Y}) = Y \ (Yansız)$$

Ortalama ve Toplam Tahminlerini Varyansı

Ortalama tahmin edicisinin varyansı:

$$V(\bar{y}) = E\big(\bar{y} - E(\bar{y})\big)^2$$

$$V(\bar{y}) = E(\bar{y} - \bar{Y})^2$$

TEOREM 2

N genişliğinde bir kitleden n genişliğinde bir örneklem BRÖ ile çekildiğinde $\bar{y}$'nin varyansı

$$V(\bar{y}) = (1 - f)\frac{S^2}{n}$$

$$f = \frac{n}{N} \ (örnekleme\ oranı)$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{y} - \bar{Y})^2}{N - 1} \ (birim\ başına\ düşen\ varyans)$$

İSPAT 2:

$$V(\bar{y} - \bar{Y}) = E(\bar{y} - \bar{Y})^2$$

$$n(\bar{y} - \bar{Y}) = (y_1 - \bar{Y}) + (y_2 - \bar{Y}) + \cdots + (y_n - \bar{Y})$$

$$n^2(\bar{y} - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{Y})^2 + 2\sum_{i<j=2}^{n}\sum(y_i - \bar{Y})(y_j - \bar{Y})$$

$$n^2E(\bar{y} - \bar{Y})^2 = E\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{Y})^2 + 2E\sum_{i<j=2}^{n}\sum(y_i - \bar{Y})(y_j - \bar{Y}) \qquad 1)$$

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i<j=2}^{n}\sum x_{ij}$$

Eşitliğin sağ tarafındaki ifadeye sonuç (1)'i uygularsak:

$$E\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{Y})^2 = \frac{n}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{Y})^2 \qquad 2)$$

$$E\sum_{i<j=2}^{n}\sum(y_i - \bar{Y})(y_j - \bar{Y}) = \frac{n}{N}\frac{n-1}{N-1}\sum_{i<j=2}^{N}\sum(y_i - \bar{Y})(y_j - \bar{Y}) \qquad 3)$$

$$\frac{\binom{N-2}{n-2}}{\binom{N}{n}} = \frac{n}{N}\frac{n-1}{N-1}$$

(2) ve (3) eşitlikleri (1)'de yerine yazılırsa:

$$n^2E(\bar{y} - \bar{Y})^2 = \frac{n}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{Y})^2 + 2\frac{n}{N}\frac{n-1}{N-1}\sum_{i<j=2}^{N}\sum(y_i - \bar{Y})(y_j - \bar{Y})$$

$$n^2E(\bar{y}-\bar{Y})^2 = \frac{n}{N}\left(\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{Y})^2 + \ 2\frac{n-1}{N-1}\sum_{i<j=2}^{N}\sum(y_i-\bar{Y})(y_j-\bar{Y})\right) \qquad *)$$

$$(x_1+x_2+x_3)^2 = x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$$

$$\left(\sum_{i=1}^{N}x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{N}x_i^2 + 2\sum_{i<j=2}^{N}\sum x_ix_j$$

$$\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{Y})\right)^2}_{0} = \sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{Y})^2 + 2\sum_{i<j=2}^{N}\sum(y_i-\bar{Y})(y_j-\bar{Y}) \qquad 4)$$

$$-\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{Y})^2 = 2\sum_{i<j=2}^{N}\sum(y_i-\bar{Y})(y_j-\bar{Y}) \qquad 5)$$

(5)’i (*)’da yerine yazarsak:

$$n^2E(\bar{y}-\bar{Y})^2 = \frac{n}{N}\left(\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{Y})^2 - \frac{n-1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{Y})^2\right)$$

$$= \frac{n}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{Y})^2\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right)$$

$$= \frac{n}{n^2N}(N-n)\frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{Y})^2}{N-1}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{Y})^2}{N-1}$$

$$V(\bar{y}) = \frac{N-n}{N}\frac{S^2}{n} = (1-f)\frac{S^2}{n}$$

SONUÇ 2:

Kitle toplamı tahmin edicisi $\hat{Y} = N\bar{y}$’nin varyansı:

$$V(\hat{Y}) = E(\hat{Y}-Y)^2$$

$$V(\hat{Y}) = N^2\,V(\bar{y})$$

$$= N^2(1-f)\frac{S^2}{n} \ veya \ N(N-n)\frac{S^2}{n}$$

$\hat{Y}$ ve $\bar{y}$ tahmin edicilerinin standart hataları:

$$SH(\bar{y}) = \sqrt{V(\bar{y})} = \frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{1-f} = S\sqrt{\frac{1-f}{n}}$$

$$SH(\hat{Y}) = \sqrt{V(\bar{\hat{Y}})} = \frac{N \times S}{\sqrt{n}}\sqrt{1-f} = N \times S\sqrt{\frac{1-f}{n}}$$

- Sonsuz bir kitleden çekilen n genişliğinde BRÖ'de ortalamanın varyanısnın $V(\bar{y}) = \frac{S^2}{n}$ olduğu biliniyor. Kitle sonlu olduğunda tek değişiklik $(1-f)$ çarpanının eklenmesidir. Bu çarpana sonlu kitlede düzeltme terimi denir. Uygulamalarda $f \leq 0,05$ veya $f \leq 0,10$ ise ihmal edilebilir.
- Düzeltme teriminin ihmal edilmesi standart hatanın bir miktar daha büyük bulunması anlamına gelir.